Safet Penjić
Nedžad Cikotić

ORTOGONALNI POLINOMI I RAZVIJANJE PROIZVOLJNE FUNKCIJE U RED PREKO ORTOGONALNIH POLINOMA

Sažetak

U ovom radu pojmu ortogonalnosti pristupamo preko definicije iz matematičke analize, i uopšte ne spominjemo geometrisko značenje ortogonalnosti i ostavljamo ga negdje u pozadini. Značenje ortogonalnost prihvatamo na isti način kao što smo prihvatili značenje sistema linearnih jednačina, ili kvadrat broja, bez obaveze da geometriski predstavimo te figure a time i vizuelno prikažemo sebi date pojmove. Glavni dio rada je rezultat da se svaka kvadratno integrabilna funkcija f(x) *na* (a,b) *može napisati u obliku reda* $\sum_{n=0}^{\infty} c_n p_n(x)$ *gdje je skup* $\{p_0(x), p_1(x), ..., p_n(x), ...\}$ *proizvoljan ortonaormiran sistem polinoma u odnosu na težinsku funkciju* $\rho(x)$.

Ključne riječi: *ortogonalni polinomi, razvijanje proizvoljne funkcije u red, težinska funkcija, Gram-Schmidtov proces ortogonalizacije,*

Summary

In this work we accept the word orthogonal as a term of mathematical analysis, on the basis of its definition, with a geometric association only in the remote background or temporarily in abeyance. Recall that we have already learned to speak of a linear equation or the square of a number without feeling obliged to visualize a geometric figure in connection with every occurrence of the words. Main part of this work is result that every square summable (integrable) function f(x) *defined on* (a,b) *we can write in the form of series* $\sum_{n=0}^{\infty} c_n p_n(x)$ *where set* $\{p_0(x), p_1(x), ..., p_n(x), ...\}$ *is arbitraty orthonormal system of polynomials with respect to an arbitraty weight function* $\rho(x)$.

Keywords: *orthogonal polynomials, development of an arbitrary function in series, weight function, Gram-Schmidt process*

1. Težinska funkcija

Posmatrajmo polinome $H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \dfrac{d^n}{dx^n} e^{-x^2}$ za $n = 0,1,2,...$ i pokažimo da je

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} H_n(x) H_m(x) dx = 0 \quad za \ n \neq m.$$

Bez gubitka opštosti izračunaćemo integral za $m > n.$ Imamo

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} H_n(x) H_m(x) dx = (-1)^{m+n} \int_{-\infty}^{\infty} e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} e^{-x^2} \frac{d^m}{dx^m} e^{-x^2} dx.$$

Ako primijenimo parcijalnu integraciju sa smjenama

$$u = e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} e^{-x^2}, \quad dv = \frac{d^m}{dx^m} e^{-x^2} dx,$$

$$du = \frac{d}{dx}\left(e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} e^{-x^2} \right) dx, \quad v = \frac{d^{m-1}}{dx^{m-1}} e^{-x^2}$$

dobićemo

$$(-1)^{m+n} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} H_n(x) H_m(x) dx = e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} e^{-x^2} \frac{d^{m-1}}{dx^{m-1}} e^{-x^2} \Bigg|_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d}{dx}\left(e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} e^{-x^2} \right) \frac{d^{m-1}}{dx^{m-1}} e^{-x^2} dx.$$

Sad primijetimo da je

$$\frac{d}{dx} e^{-x^2} = e^{-x^2}(-2x),$$

$$\frac{d^2}{dx^2} e^{-x^2} = e^{-x^2}(-2x)(-2x) + e^{-x^2}(-2) = e^{-x^2}((-2x)^2 - 2),$$

$$\frac{d^3}{dx^3} e^{-x^2} = e^{-x^2}(-2x)(4x^2 - 2) + e^{-x^2}(8x) = e^{-x^2}((-2x)^3 + 12x),$$

$$...$$

$$\frac{d^n}{dx^n} e^{-x^2} = e^{-x^2}((-2x)^n + ...)$$

pa imamo

$$e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} e^{-x^2} \frac{d^{m-1}}{dx^{m-1}} e^{-x^2} \Bigg|_{-\infty}^{\infty} = e^{x^2} e^{-x^2}((-2x)^n + ...) e^{-x^2}((-2x)^{m-1} + ...)\Big|_{-\infty}^{\infty} = 0$$

zato što za svaki fiksirani $k \in N$ vrijedi

$$x^k e^{-x^2} \to 0 \quad kad \ x \to \infty.$$

Prema tome

$$(-1)^{m+n} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} H_n(x) H_m(x) dx = -\int_{-\infty}^{\infty} \frac{d}{dx}\left(e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} e^{-x^2} \right) \frac{d^{m-1}}{dx^{m-1}} e^{-x^2} dx.$$

Ako parcijalnu integraciju ponovimo još $n-1$ puta dobićemo

$$(-1)^{m+n} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} H_n(x) H_m(x) dx = (-1)^n \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d^n}{dx^n}\left(e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} e^{-x^2} \right) \frac{d^{m-n}}{dx^{m-n}} e^{-x^2} dx.$$

Sad primjetimo da je

$$\frac{d^n}{dx^n}\left(e^{x^2}\frac{d^n}{dx^n}e^{-x^2}\right)=\frac{d^n}{dx^n}((-2x)^n+...)=(-1)^n2^nn!,$$

iz čega slijedi

$$(-1)^{m+n}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-x^2}H_n(x)H_m(x)dx=(-1)^n(-1)^n2^nn!\int_{-\infty}^{\infty}\frac{d^{m-n}}{dx^{m-n}}e^{-x^2}dx=2^nn!\left(\frac{d^{m-n-1}}{dx^{m-n-1}}e^{-x^2}\right)\Bigg|_{-\infty}^{\infty}=0.$$

Možemo zaključiti

$$\int_{-\infty}^{\infty}e^{-x^2}H_n(x)H_m(x)dx=0$$

ako je $m\neq n.$ Ovu relaciju možemo opisati tako što ćemo reći da su funkcije $(e^{-x^2})^{1/2}H_n(x),$ $(e^{-x^2})^{1/2}H_m(x)$ međusobno ortogonalne na intervalu $(-\infty,\infty).$ Istu relaciju možemo opisati i na drugi način, koji je mnogo važniji za tekst koji slijedi, tako što ćemo reći da su polinomi $H_n(x),$ $H_m(x)$ međusobno ortogonalni na intervalu $(-\infty,\infty)$ *u odnosu na težinsku funkciju* e^{-x^2}. Koncept sistema ortogonalnih polinoma u odnosu na težinsku funkciju će biti dominantan od sad pa nadalje. Formalizujmo prethodno napisano:

(1.01) Definicija (ortogonalnost u odnosu na težinsku funkciju)

Za dvije funkcije $f_1(x)$ *i* $f_2(x)$ *kažemo da su međusobno ortogonalne na intervalu* (a,b) *u odnosu na težinsku funkciju* $\rho(x)$ *ako i samo ako*

$$\int_a^b\rho(x)f_1(x)f_2(x)dx=0 \qquad \Diamond$$

(1.02) Problem

Pokazati da su polinomi

$$H_n(x)=(-1)^ne^{x^2}\frac{d^n}{dx^n}e^{-x^2}$$

međusobno ortogonalni na intervalu $(-\infty,\infty)$ *u odnosu na težinsku funkciju* e^{-x^2} *za* $n=0,1,2,...$ $\Diamond$

Sljedeće što želimo pokazati je da se funkcija $cosm\theta,$ za proizvoljno $m\in N_0,$ može izraziti kao polinom C_m stepena m po promjenjivoj $cos\theta,$ a poslije toga želimo pokazati da za takve polinome vrijedi sljedeća jednakost:

$$\int_{-1}^{1}(1-x^2)^{-1/2}C_m(x)C_k(x)dx=0$$

Primjenom adicionih teorema na izraze $cos((n+1)\theta)$ i $cos((n-1)\theta)$ dobijamo

$$cos((n+1)\theta)=cos(n\theta+\theta)=cosn\theta cos\theta-sinn\theta\sin\theta,$$

$$cos((n-1)\theta)=cos(n\theta-\theta)=cosn\theta cos\theta+sinn\theta\sin\theta.$$

Sabiranjem zadnje dvije jednakosti i premještanjem elemenata, imamo

$$cos((n+1)\theta)=2cosn\theta cos\theta-cos((n-1)\theta).$$

Ova jednakost će nam pomoći, da pomoću matematičke indukcije pokažemo sljedeću tvrdnju: Za svaki fiksirani ne-negativni cijeli broj $n,$ postoje cijeli $c_{ni},$ $i=0,1,2,...,n,$ takvi da

$$cosn\theta = \sum_{i=0}^{n} c_{ni}\, cos^{i}(\theta).$$

BAZA INDUKCIJE

Za $n=0$ imamo $cos0\theta = 1 = 1\cdot cos^{0}(\theta)$. Prema tome $c_{00}=1$. Za $n=1$ imamo $cos1\theta = cos\theta = 1\cdot cos^{1}(\theta)$. Prema tome $c_{10}=0$, $c_{11}=1$. Jednakost je tačna za $n=0$ i $n=1$.

KORAK INDUKCIJE

Pretpostavimo da je jednakost tačna za sve $k=1,2,...,n$ tj. pretpostavimo da za svaki fiksiran cijeli k $(1\le k\le n)$ postoje cijeli brojevi c_{ki}, $i=0,1,2,...,k$, takvi da

$$coské\theta$$

i na osnovu ove pretpostavke pokažimo da je jednakost tačna za $n+1$. Imamo:

$$\begin{aligned} cos((n+1)\theta) &= 2cosn\theta cos\theta - cos((n-1)\theta) \overset{\substack{\text{na osnovu}\\ \text{pretpostavke}}}{=} \\ &= 2\left(\sum_{i=0}^{n} c_{ni}\, cos^{i}(\theta)\right)cos\theta - \sum_{i=0}^{n-1} c_{n-1,i}\, cos^{i}(\theta) \\ &= \sum_{i=0}^{n} 2c_{ni}\, cos^{i+1}(\theta) - \sum_{i=0}^{n-1} c_{n-1,i}\, cos^{i}(\theta) \end{aligned}$$

iz čega možemo vidjeti da postoje cijeli brojevi $c_{n+1,i}$, $i=0,1,2,...,n+1$, takvi da

$$cos(n+1)\theta = \sum_{i=0}^{n+1} c_{n+1,i}\, cos^{i}(\theta).$$

Možemo zaključiti da je jednakost tačna za svaki $n\in N_0$. Drugim riječima funkcija $cosn\theta$, za proizvoljno $n\in N_0$, može izraziti kao polinom C_n stepena n po promjenjivoj $cos\theta$.

Za $m\ne k$ izračunajmo integral $\int_0^{\pi} cosm\theta \cos k\theta d\theta$:

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi} cosm\theta \cos k\theta d\theta &= \int_0^{\pi} \left(\frac{1}{2}cos(m-k)\theta + \frac{1}{2}cos(m+k)\theta\right)d\theta = \\ &= \frac{1}{2}\int_0^{\pi} cos(m-k)\theta d\theta + \frac{1}{2}\int_0^{\pi} cos(m+k)\theta d\theta = \\ &= \frac{1}{2(m-k)} sin(m-k)\theta\Big|_0^{\pi} + \frac{1}{2(m+k)} sin(m+k)\theta\Big|_0^{\pi} = 0. \end{aligned}$$

U relaciji

$$\int_0^{\pi} cosm\theta cosk\theta d\theta = 0,\ m\ne k$$

neka je $x = cos\theta$. Tada je $dx = -sin\theta = -(1-x^2)^{1/2}d\theta$ tj. $d\theta = -(1-x^2)^{-1/2}dx$. Funkcija $cosm\theta$ se može izraziti kao polinom stemena m po promjenjivoj $cos\theta$:

$$cosm\theta = C_m(cos\theta) = C_m(x),$$

i slično imamo za $cosk\theta$. Prema tome $\int_0^{\pi} cosm\theta \cos k\theta d\theta = 0$ postaje

$$\int_{-1}^{1}(1-x^2)^{-1/2}C_m(x)C_k(x)dx = 0$$

Polinomi $C_m(x)$, $m = 0,1,2,...,$ *su međusobno ortogonalni na intervalu* $[-1,1]$ *u odnosu na težinsku funkciju* $(1-x^2)^{-1/2}$. Time smo dokazali Lemu 1.03 i riješili Problem 1.04.

(1.03) Lema

Funkcija $\cos m\theta$, *za proizvoljno* $m \in N_0$, *se može izraziti kao polinom* C_m *stepena* m *po promjenjivoj* $\cos\theta$. ◊

(1.04) Problem

Pokazati da su polinomi C_m *iz Leme 1.03 međusobno ortogonalni na intervalu* $(-1,1)$ *u odnosu na težinsku funkciju* $(1-x^2)^{-1/2}$. ◊

Skoro na isti način (kao u tekstu iznad), može se pokazati sljedeće: Funkcija $\sin(m+1)\theta$ zadovoljava jednakost

$$\sin(m+1)\theta = \sin\theta S_m(\cos\theta),$$

gdje je S_m polinom stepena m po promjenjivoj $\cos\theta$. Relacija

$$\int_{0}^{\pi}\sin(m+1)\theta\sin(k+1)\theta d\theta = 0,\ m \neq k,$$

je ekvivalentna sa

$$\int_{-1}^{1}(1-x^2)^{1/2}S_m(x)S_k(x)dx = 0$$

Polinomi $S_m(x)$ *su međusobno ortogonalni na intervalu* $[-1,1]$ *u odnosu na težinsku funkciju* $(1-x^2)^{1/2}$.

Na kraju posmatrajmo polinome definisane sa

$$P_0(x) = 1,$$

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n,\ n = 1,2,3,....$$

Pokažimo da za ove polinome vrijedi

$$\int_{-1}^{1}P_n(x)P_m(x)dx = 0\ \ ,za\ n \neq m.$$

Zbog pogodnosti pišemo $(x^2-1)^n = p_n(x)$, tako da je

$$\int_{-1}^{1}P_n(x)x^m dx = \frac{1}{2^n n!}\int_{-1}^{1}p_n(x)x^m dx.$$

Ovaj integral ćemo izračunati za $m < n$ pomoću rekurzije. Prvo primjetimo da

$$p_n^{(k)}(x) = 0\quad za\ x = \pm 1\ i\ k = 0,1,2,...,n-1.$$

Potom parcijalnom integracijom, sa smjenama

$$u = x^m,\ \ dv = p_n^{(n)}(x)dx$$

$$du = mx^{m-1}dx,\ \ v = p_n^{(n-1)}(x)$$

dobijamo

$$\int_{-1}^{1} p_n(x)x^m\,dx = -m\int_{-1}^{1} p_n^{(n-1)}(x)x^{m-1}\,dx.$$

Ponavljajući još parcijalnu integraciju $m-1$ puta, dolazimo do

$$(-1)^m m!\int_{-1}^{1} p_n^{(n-m)}(x)dx = (-1)^m m!\left[\, p_n^{(n-m-1)}(x)\right]\Big|_{-1}^{1} = 0 \;\; (m < n).$$

Prema tome,

$$\int_{-1}^{1} P_n(x)x^m\,dx = 0, \quad za \;\; m < n.$$

Kako je P_m polinom stepena $m,$ slijedi da

$$\int_{-1}^{1} P_n(x)P_m(x)dx = 0 \;\; , za \;\; n \neq m.$$

Polinomi $P_n(x)$ su međusobno ortogonalni na intervalu $[-1,1]$ u odnosu na težinsku funkciju 1. U tekstu iznad smo pokazali rješenje Problema 1.05:

(1.05) Problem

Pokazati da su polinomi definisani sa

$$P_0(x) = 1,$$

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n, \;\; n = 1,2,3,....$$

međusobno ortogonalni na intervalu $(-1,1)$ *u odnosu na težinsku funkciju* 1. ◊

Napomena: Polinomi $H_n(x)$ se zovu *Hermitovi polinomi* reda $n.$ Ovi polinomi se mogu dobiti kao rješenja Hermit-ove diferencialne jednačine reda n

$$y'' - 2xy' + 2ny = 0.$$

Prvih šest Hermitovih polinoma su

$$H_0(x) = 1,$$
$$H_1(x) = 2x\,,$$
$$H_2(x) = 4x^2 - 2\,,$$
$$H_3(x) = 8x^3 - 12x\,,$$
$$H_4(x) = 16x^4 - 48x^2 + 12\,,$$
$$H_5(x) = 32x^5 - 160x^3 + 120x\,.$$

Polinomi $C_m(x)$ i $S_m(x)$ zovu se trigonometriski polinomi ili *Chebichef-ovi polinomi* prve i druge vrste reda $n.$ Ovi polinomi se mogu dobiti kao rješenja Chebichef-ove diferencijalne jednačine reda n

$$(1-x^2)y'' - xy' + n^2 y = 0.$$

Chebichef-ovi polinomi se također, mnogo opštije, primjenjuje u sistemima ortogonalnih polinoma u odnosu na proizvoljnu težinsku funkciju. Prvih šest Chebichef-ovi polinomi prve vrste izraženih preko stepena promjenjive x su:

$$C_0(x) = 1,$$
$$C_1(x) = x\,,$$
$$C_2(x) = 2x^2 - 1\,,$$
$$C_3(x) = 4x^3 - 3x\,,$$
$$C_4(x) = 8x^4 - 8x^2 + 1\,,$$

$C_5(x) = 16x^5 - 20x^3 + 5x$.

Polinomi $P_n(x)$ se zovu *Legendre-ovi polinomi* reda n. Ovi polinomi se dobiju kao rješenja Legendre-ove diferencijalne jednačine reda n

$$(1-x^2)y'' - 2xy' + n(n+1)y = 0.$$

Prvih šest Legendre-ovih polinoma su

$P_0(x) = 1$,

$P_1(x) = x$,

$P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1)$,

$P_3(x) = \frac{1}{2}(5x^3 - 3x)$,

$P_4(x) = \frac{1}{8}(35x^4 - 30x^2 + 3)$,

$P_5(x) = \frac{1}{8}(63x^5 - 70x^3 + 15x)$.

2. Gram-Schmidt-ov proces ortonormalizacije

Neka je $\phi_0(x),\ \phi_1(x),\ \phi_2(x),\ldots$ proizvoljan niz funkcija na intervalu (a,b), takav da su sve funkcije u nizu integrabilne i linearno nezavisne. U tekstu koji slijedi, interval (a,b) se može zamjeniti beskonačnim intervalom (a,∞) ili sa intervalom $(-\infty,\infty)$, ali pod uslovom da svi integrali koji se posmatraju postoje. Pretpostavićemo da je svaka linearna kombinacija $\psi = \alpha_0\phi_0 + \ldots + \alpha_m\phi_m$, konačnog broja ϕ-jeva sa konstantnim koeficijentima $\alpha_0,\ldots,\alpha_m$ ne svi nula, različita od nule na skupu tački koje su dovoljne da naprave određen integral od ψ^2, nad posmatranim intervalom, različit od nule.

U tekstu koji slijedi simboli $\|\phi_0\|$, $\|G_1\|$, ..., $\|G_n\|$ predstavljaju realne brojeve, kao i simboli $\langle\phi_i, g_j\rangle$, za $i, j = 1,2,\ldots n.$ Neka je

$$d_0 = \|\phi_0\|^2 = \int_a^b [\phi_0(x)]^2\,dx,$$

$$g_0(x) = \frac{\phi_0(x)}{d_0^{1/2}} = \frac{\phi_0(x)}{\|\phi_0\|},$$

tako da je $\int_a^b [g_0(x)]^2\,dx = 1.$ Neka je

$$c_{10} = \langle\phi_1, g_0\rangle = \int_a^b \phi_1(x)g_0(x)dx,$$

$$G_1(x) = \phi_1(x) - c_{10}g_0(x) = \phi_1(x) - \langle\phi_1, g_0\rangle g_0(x),$$

$$d_1 = \|G_1\|^2 = \int_a^b [G_1(x)]^2\,dx,$$

$$g_1(x) = \frac{G_1(x)}{d_1^{1/2}} = \frac{G_1(x)}{\|G_1\|}.$$

Tada je

$$\int_a^b G_1(x)g_0(x)dx = \int_a^b (\phi_1(x) - \langle\phi_1, g_0\rangle g_0(x))g_0(x)dx = 0$$

$$\int_a^b g_1(x)g_0(x)dx = \int_a^b \frac{G_1(x)}{\|G_1\|} g_0(x)dx = \frac{1}{\|G_1\|}\int_a^b G_1(x)g_0(x)dx = 0 \quad ,$$

$$\int_a^b [g_1(x)]^2\,dx = 1.$$

U opštem slučaju neka su funkcije $g_2(x),\ g_3(x), \ldots$ definisane uzastopno sa relacijama

$$c_{nk} = \langle \phi_n, g_k\rangle = \int_a^b \phi_n(x)g_k(x)dx,$$

$$G_n(x) = \phi_n(x) - \sum_{k=0}^{n-1} c_{nk}g_k(x) = \phi_n(x) - \sum_{k=0}^{n-1}\langle \phi_n, g_k\rangle g_k(x),$$

$$d_n = \|G_n\|^2 = \int_a^b [G_n(x)]^2\,dx,$$

$$g_n(x) = \frac{G_n(x)}{d_n^{1/2}} = \frac{G_n(x)}{\|G_n\|}.$$

Matematičkom indukcijom nije teško pokazati da je svaka od funkcija $g_n(x)$ ortogonalna na $g_0(x)$, ..., $g_{n-1}(x)$

$$\int_a^b g_n(x)g_m(x)dx = \int_a^b \frac{G_n(x)}{\|G_n\|} g_m(x)dx = \frac{1}{\|G_n\|}\int_a^b G_n(x)g_m(x)dx =$$

$$= \frac{1}{\|G_n\|}\int_a^b \left(\phi_n(x) - \sum_{k=0}^{n-1}\langle \phi_n, g_k\rangle g_k(x)\right) g_m(x)dx =$$

$$= \frac{1}{\|G_n\|}\int_a^b \phi_n(x)g_m(x)dx - \frac{1}{\|G_n\|}\sum_{k=0}^{n-1}\langle \phi_n, g_k\rangle \int_a^b g_k(x)g_m(x)dx =$$

$$= \frac{1}{\|G_n\|}\langle \phi_n, g_m\rangle - \frac{1}{\|G_n\|}\sum_{k=0}^{n-1}\langle \phi_n, g_k\rangle \int_a^b g_k(x)g_m(x)dx,$$

i da je svaka od funkcija $g_0(x),\ \ldots,\ g_n(x)$ normalizovana, tj. imaju vrjednost 1 kao integral njihovih kvadrata nad intervalom (a,b). Kako je relacija ortogonalnosti simetrična, isto tako možemo reći da su proizvoljne dvije funkcije $g_i,\ g_j$ međusobno ortogonalne, za $i \neq j$. Činjenica da su g-ovi oboje, i međusobno ortogonalne i normalizovane, se sumira u jednu riječ, koju zovemo *ortonormirane* funkcije.

Ako kao ϕ-ove uzmemo konkretno funkcije $1,\ x,\ x^2$ i x^3, na intervalu $(-1,1)$ tada kao odgovarajuće g-ove ćemo dobiti $\frac{1}{\sqrt{2}},\ \sqrt{\frac{3}{2}}x,\ \frac{1}{2}\sqrt{\frac{5}{2}}(3x^2-1)$ i $\frac{1}{2}\sqrt{\frac{7}{2}}\left(5x^3-3x\right)$. Pokažimo ovo.

$$d_0 = \|\phi_0\|^2 = \|1\|^2 = \int_{-1}^{1} 1^2\,dx = 2\,,$$

$$g_0(x) = \frac{\phi_0(x)}{d_0^{1/2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\,,$$

tako da je $\int_{-1}^{1}[g_0(x)]^2\,dx = 1.$ Dalje

$$c_{10} = \langle x, g_0\rangle = \int_{-1}^{1} x\frac{1}{\sqrt{2}}dx = 0,$$

$$G_1(x) = \phi_1(x) - c_{10}g_0(x) = x - 0\cdot g_0(x) = x,$$

$$d_1 = \|x\|^2 = \int_{-1}^{1} x^2\,dx = \frac{2}{3},$$

$$g_1(x) = \sqrt{\frac{3}{2}}x,$$

tako da je $\int_{-1}^{1} g_1(x)g_0(x)dx = 0 \quad \int_{-1}^{1}[g_1(x)]^2\,dx = 1.$ Dalje

$$c_{20} = \langle x^2, g_0 \rangle = \int_{-1}^{1} x^2 \frac{1}{\sqrt{2}}dx = \frac{\sqrt{2}}{3},$$

$$c_{21} = \langle x^2, g_1 \rangle = \int_{-1}^{1} x^2 \sqrt{\frac{3}{2}}xdx = 0,$$

$$G_2(x) = x^2 - c_{20}g_0(x) - c_{21}g_1(x) = x^2 - \frac{1}{3},$$

$$d_2 = \| x^2 - \frac{1}{3} \|^2 = \int_{-1}^{1}\left(x^2 - \frac{1}{3}\right)^2 dx = \frac{8}{45},$$

$$g_2(x) = \sqrt{\frac{45}{8}}\left(x^2 - \frac{1}{3}\right) = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{5}{2}}(3x^2 - 1),$$

tako da je $\int_{-1}^{1} g_2(x)g_0(x)dx = 0 \quad \int_{-1}^{1} g_2(x)g_1(x)dx = 0 \quad \int_{-1}^{1}[g_2(x)]^2\,dx = 1.$ Na kraju

$$c_{30} = \langle x^3, g_0 \rangle = \int_{-1}^{1} x^3 \frac{1}{\sqrt{2}}dx = 0,$$

$$c_{31} = \langle x^3, g_1 \rangle = \int_{-1}^{1} x^3 \sqrt{\frac{3}{2}}xdx = \frac{\sqrt{6}}{5},$$

$$c_{32} = \langle x^3, g_2 \rangle = \int_{-1}^{1} x^3 \frac{1}{2}\sqrt{\frac{5}{2}}(3x^2 - 1)dx = 0,$$

$$G_3(x) = x^3 - c_{30}g_0(x) - c_{31}g_1(x) - c_{32}g_2(x) = x^3 - \frac{\sqrt{6}}{5}\sqrt{\frac{3}{2}}x = x^3 - \frac{3}{5}x,$$

$$d_3 = \| x^3 - \frac{3}{5}x \|^2 = \int_{-1}^{1}\left(x^3 - \frac{3}{5}x\right)^2 d\,x = \frac{8}{175},$$

$$g_3(x) = \sqrt{\frac{175}{8}}\left(x^3 - \frac{3}{5}x\right) = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{7}{2}}\left(5x^3 - 3x\right),$$

tako da je $\int_{-1}^{1} g_3(x)g_0(x)dx = 0 \quad \int_{-1}^{1} g_3(x)g_1(x)dx = 0 \quad \int_{-1}^{1} g_3(x)g_2(x)dx = 0 \quad \int_{-1}^{1}[g_3(x)]^2\,dx = 1.$

Primijetimo da su dobijeni polinomi $\frac{1}{\sqrt{2}},\ \sqrt{\frac{3}{2}}x,\ \frac{1}{2}\sqrt{\frac{5}{2}}(3x^2 - 1)$ i $\frac{1}{2}\sqrt{\frac{7}{2}}\left(5x^3 - 3x\right)$ u stvari prva četri normirana Lagendre-ova polinoma.

Opisana procedura za konstrukciju ortogonalnog sistema iz proizvoljnog datog skupa funkcija je poznata pod imenom *Gram-Schmidt-ov proces ortogonalizacije*. Formalizujmo prethodno napisani tekst:

(2.01) Teorema (Gram-Schmidt-ova postupak ortogonalizacije)

Neka je $\phi_0(x),\ \phi_1(x),\ \phi_2(x),\ \ldots\ \phi_n(x)$ proizvoljan niz funkcija na intervalu $(a,b),$ takav da su sve funkcije iz niza integrabilne na (a,b) i linearno nezavisne. Tada je Gram-Schmidt-ov niz definisan sa

$$g_0(x) = \frac{\phi_0(x)}{\int_a^b [\phi_0(x)]^2\,dx},$$

$$g_k(x) = \frac{\phi_k(x) - \sum\limits_{i=0}^{k-1}\left(\int\limits_a^b \phi_k(x) g_i(x)\,dx\right) g_i(x)}{\int\limits_a^b \left[\phi_k(x) - \sum\limits_{i=0}^{k-1}\left(\int\limits_a^b \phi_k(x) g_i(x)\,dx\right) g_i(x)\right]^2 dx} \quad za\ k = 1, 2, 3, ..., n$$

ortonormiran niz. ◊

(2.02) Vježba

Primjenom Gram-Schmidtovog postupka ortogonalizacije konstruisati ortonormiran sistem polazeći od skupa funkcija $\{1, x, x^2, x^3\}$, *koristeći interval* $(-1,1)$. ◊

Funkcija g_n je u stvari linearna kombinacija od ϕ_0, ..., ϕ_n (pod frazom <u>*linearna kombinacija*</u> će se uvijek podrazumjevati <u>*linearna kombinacija sa konstantnim koeficijentima*</u>)

$$g_0(x) = \frac{1}{\sqrt{d_0}}\phi_0(x),$$

$$g_1(x) = \frac{1}{\sqrt{d_1}}G_1(x) = \frac{1}{\sqrt{d_1}}\phi_1(x) - \frac{c_{10}}{\sqrt{d_1}}g_0(x),$$

$$g_2(x) = \frac{1}{\sqrt{d_2}}G_2(x) = \frac{1}{\sqrt{d_2}}\phi_2(x) - \frac{c_{20}}{\sqrt{d_2}}g_0(x) - \frac{c_{21}}{\sqrt{d_2}}g_1(x),$$

...

$$g_n(x) = \frac{1}{\sqrt{d_n}}G_n(x) = \frac{1}{\sqrt{d_n}}\phi_n(x) - \frac{c_{n0}}{\sqrt{d_n}}g_0(x) - \frac{c_{n1}}{\sqrt{d_n}}g_1(x) - \dots - \frac{c_{n,n-1}}{\sqrt{d_n}}g_{n-1}(x),$$

i obrnuto, s obzirom da su koeficijenti uz ϕ_n u izrazu za g_n, u svim slučajima različiti od nule, relaciska veza ϕ-eva sa g-ovima se može uspješno riješiti, svaki ϕ_n je linearna kombinacija od g_0, ..., g_n. Pokažimo ovo zadnje.

Već smo primjetili da je svaki $g_n(x)$ linearna kombinacija od $\phi_0(x)$, $\phi_1(x)$, ..., $\phi_n(x)$. Drugim riječima za svaki $g_n(x)$ postoje koeficijenti $a_{ni} \in R$, ($i = 0,1,...,n$) takvi da

$$g_n(x) = a_{n0}\phi_0(x) + a_{n1}\phi_1(x) + \dots + a_{nn}\phi_n(x),$$

tj. ako posmatramo funkcije $g_0(x)$, $g_1(x)$, ..., $g_n(x)$ imamo

$$g_0(x) = a_{00}\phi_0(x),$$

$$g_1(x) = a_{10}\phi_0(x) + a_{11}\phi_1(x),$$

$$g_2(x) = a_{20}\phi_0(x) + a_{21}\phi_1(x) + a_{22}\phi_2(x)$$

...

$$g_n(x) = a_{n0}\phi_0(x) + a_{n1}\phi_1(x) + \dots + a_{nn}\phi_n(x).$$

Jednakosti iznad možemo napisati u matričnom obliku

$$\begin{bmatrix} g_0(x) \\ g_1(x) \\ g_2(x) \\ \vdots \\ g_n(x) \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} a_{00} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_{10} & a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ a_{20} & a_{21} & a_{22} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n0} & a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}}_{=A} \begin{bmatrix} \phi_0(x) \\ \phi_1(x) \\ \phi_2(x) \\ \vdots \\ \phi_n(x) \end{bmatrix}.$$

Ako napisanu gornje-trougaonu matricu označimo sa A, kako je a_{ii} različit od nule za svaki $i = 0,1,2,..,n,$ matrica A je nesingularna, pa dati sistem ima jedinstveno rješenje. Matrica koja je inverzna gornje-trougaonoj matrici mora biti gornje-trougona. Prema tome svaki ϕ_n se može napisati kao linearna kombinacija od $g_0,\ g_1,\ ...,\ g_n$. Iz ovoga slijedi da je g_n ortogonalan na svaku linearnu kombinaciju od $\phi_0,\ ...,\ \phi_{n-1}$. Time smo dokazali sljedeće dvije leme:

(2.03) Lema

Neka su $\phi_0,\ ...,\ \phi_n,\ g_0,\ ...,\ g_n,$ *funkcije iz Teoreme 2.01. Tada svaka funkcija* $g_k,\ k = 0,1,...,n,$ *se može napisati kao linearna kombinacija od* $\phi_0,\ ...,\ \phi_k,$ *i obrnuto, svaka funkcija* $\phi_k,\ k = 0,1,...,n,$ *se može napisati kao linearna kombinacija od* $g_0,\ ...,\ g_k.$ ◊

(2.04) Lema

Neka su $\phi_0,\ ...,\ \phi_n,\ g_0,\ ...,\ g_n,$ *funkcije iz Teoreme 2.01. Tada je funkcija* $g_k,\ k = 0,1,...,n,$ *ortogonalna na svaku linearnu kombinaciju od* $\phi_0,\ ...,\ \phi_{k-1}.$ ◊

Ako je $\gamma(x)$ neka linearna kombinacija od $\phi_0,\ ...,\ \phi_n$ koja je ortogonalna na svaku od funkcija $\phi_0,$ ..., $\phi_{n-1},$ ona mora biti konstanta pomnožena sa $g_n(x).$ Ovo možemo vidjeti iz procesa konstrukcije $g_n(x) = G_n(x)/d_n^{1/2},$ gdje su c_{10} i ostali koeficijenti niza c_{nk} u funkcijama $G_n(x)$ jedinstveno određeni zbog zahtjeva ortogonalnosti u svakom koraku, a koeficijenti uz $\phi_n(x)$ su jedinice ($G_n(x) = \phi_n - \sum_{k=0}^{n-1} c_{nk} g_k$). Iako osobina ortogonalnosti sama po sebi dozvoljava množenje čitavog izraza $G_n(x)$ sa proizvoljnim konstantnim faktorom, da je $\gamma(x)$ konstanta pomnožena sa $g_n(x)$ možemo pokazati i na sljedeći način. Ako su $a_n > 0$ i $a_{n'}$ koeficijenti uz ϕ_n u g_n i γ-i redom

$$g_n(x) = a_n\phi_n(x) + \dots + a_0\phi_0(x),$$
$$\gamma(x) = a_n'\phi_n(x) + \dots + a_0'\phi_0(x),$$

izraz $\gamma - \frac{a_{n'}}{a_n} g_n$ ne sadrži ϕ_n; i on je linearna kombinacija od $\phi_0,\ ...,\ \phi_{n-1}$ koji je ortogonalan na svaku od ovih funkcija (kako je γ ortogonalna na svaku od $\phi_0,\ ...,\ \phi_{n-1}$ i kako je g_n ortogonalna na svaku od $\phi_0,\ ...,\ \phi_{n-1}$ slijedi da je i $\gamma - \frac{a_{n'}}{a_n} g_n$ ortogonalna na svaku od $\phi_0,\ ...,\ \phi_{n-1}$), pa je ortogonalna i na sebe, tj. integral njezinog kvadrata nad posmatranim intervalom je nula. Ovo znači da je $\gamma - \frac{a_{n'}}{a_n} g_n = 0,$ pa kako su ϕ-jevi linearno nezavisni svi koeficienti po kojima je ova funkcija izražena, preko članova od

$\phi_0,\ ...,\ \phi_{n-1},$ moraju biti nula. Dalje, ako je posmatrana γ normalizovana i vrijedi da je $a'y_n \le 0,$ γ mora biti identički jednaka sa $g_n.$ Time smo dokazali Lemu 2.05:

(2.05) Lema

Ako je $\gamma(x)$ linearna kombinacija od $\phi_0,\ ...,\ \phi_n$ koja je ortogonalna na svaku od funkcija $\phi_0,\ ...,$ $\phi_{n-1},$ tada postoji konstanta $\alpha \in R$ takva da $\gamma(x) = \alpha g_n(x),$ za svako x. ◊

3. Ortogonalni polinomi koji odgovaraju proizvoljnoj težinskoj funkciji

Neka je $\rho(x)$ ne-negativna funkcija koja je integrabilna nad $(a,b),$ i koja ima osobinu da je vrijednost određenog integrala $\rho(x)$ nad (a,b) u stvari pozitivan. U većini važnih primjena $\rho(x)$ će biti neprekidan i pozitivan kroz čitav interval, osim možda u krajnjim tačkama, gdje može nestati ili postati beskonačan. U slučaju beskonačnog intervala obično se pretpostavi da je proizvod $\rho(x)$ sa proizvoljnim polinomom, integrabilan, nad posmatranim intervalom. Neka je proizvod $[\rho(x)]^{1/2}x^k,$ $k = 0,1,2,...$ uzeta kao funkcija iz Teoreme 2.01. Odgovarajuće funkcije $g_n(x),$ koje su u stvari linearne kombinacije ovih (Lema 2.03), će biti oblika $[\rho(x)]^{1/2}p_n(x),$ gdje su $p_n(x)$ polinomi stepena $n.$ Izračunajmo prvih nekoliko polinoma.

$$d_0 = \| \phi_0 \|^2 = \| [\rho(x)]^{1/2} x^0 \|^2 = \int_a^b \rho(x)dx,$$

$$g_0(x) = \frac{[\rho(x)]^{1/2} x^0}{d_0^{1/2}} = \frac{1}{\sqrt{d_0}}[\rho(x)]^{1/2} = [\rho(x)]^{1/2} p_0(x),$$

gdje je $p_0(x) = \dfrac{1}{\sqrt{d_0}}.$ Izračunajmo $g_1(x)$

$$c_{10} = \langle \phi_1, g_0 \rangle = \int_a^b [\rho(x)]^{1/2} x^1 \frac{1}{\sqrt{d_0}}[\rho(x)]^{1/2} dx, = \frac{1}{\sqrt{d_0}}\int_a^b \rho(x)xdx,$$

$$G_1(x) = \phi_1(x) - c_{10}g_0(x) = [\rho(x)]^{1/2}x^1 - c_{10}\frac{1}{\sqrt{d_0}}[\rho(x)]^{1/2} = [\rho(x)]^{1/2}\left(x - \frac{c_{10}}{\sqrt{d_0}} \right),$$

$$d_1 = \| G_1 \|^2 = \int_a^b [G_1(x)]^2 dx,$$

$$g_1(x) = \frac{G_1(x)}{d_1^{1/2}} = [\rho(x)]^{1/2}\left(\frac{1}{\sqrt{d_1}}x - \frac{c_{10}}{\sqrt{d_1 d_0}} \right) = [\rho(x)]^{1/2} p_1(x),$$

gdje je $p_1(x) = \dfrac{1}{\sqrt{d_1}}x - \dfrac{c_{10}}{\sqrt{d_1 d_0}}.$ Izračunajmo $g_2(x)$

$$c_{20} = \langle \phi_2, g_0 \rangle = \int_a^b [\rho(x)]^{1/2} x^2 [\rho(x)]^{1/2} p_0(x)dx = \int_a^b \rho(x)x^2 p_0(x)dx,$$

$$c_{21} = \langle \phi_2, g_1 \rangle = \int_a^b [\rho(x)]^{1/2} x^2 [\rho(x)]^{1/2} p_1(x)dx = \int_a^b \rho(x)x^2 p_1(x)dx,$$

$$G_2(x) = \phi_2(x) - c_{20}g_0(x) - c_{21}g_1(x) = [\rho(x)]^{1/2}x^2 - c_{20}[\rho(x)]^{1/2}p_0(x) - c_{21}[\rho(x)]^{1/2}p_1(x) =$$

$$= [\rho(x)]^{1/2}\left(x^2 - c_{20}p_0(x) - c_{21}p_1(x)\right) = [\rho(x)]^{1/2}\left(x^2 - \frac{c_{20}}{\sqrt{d_0}} - \frac{c_{21}}{\sqrt{d_1}}x - \frac{c_{21}c_{10}}{\sqrt{d_1 d_0}}\right),$$

$$d_2 = \| G_2 \|^2 = \int_a^b [G_2(x)]^2 dx,$$

$$g_2(x) = \frac{G_2(x)}{d_2^{1/2}} = [\rho(x)]^{1/2}\left(\frac{1}{\sqrt{d_2}}x^2 - \frac{c_{21}}{\sqrt{d_2 d_1}}x - \frac{c_{21}c_{10}}{\sqrt{d_2 d_1 d_0}} - \frac{c_{20}}{\sqrt{d_2 d_0}}\right) = [\rho(x)]^{1/2} p_2(x),$$

gdje je $p_2(x) = \frac{1}{\sqrt{d_2}}x^2 - \frac{c_{21}}{\sqrt{d_2 d_1}}x - \frac{c_{21}c_{10}}{\sqrt{d_2 d_1 d_0}} - \frac{c_{20}}{\sqrt{d_2 d_0}}$. Ako pretpostavimo da su $g_k(x) = [\rho(x)]^{1/2} p_k(x),\ k = 0,1,...,n-1,$ funkcije dobijene Gram-Schmidtovim postupkom ortogonalizacije pomoću funkcija $\phi_k(x) = [\rho(x)]^{1/2} x^k,\ k = 0,1,2,...,n-1,$ gdje je svaki $p_k(x)$ polinomi stepena k, tada za $g_n(x)$ imamo

$$c_{nk} = \langle \phi_n, g_k \rangle = \int_a^b [\rho(x)]^{1/2} x^n [\rho(x)]^{1/2} p_k(x) dx = \int_a^b \rho(x) x^n p_k(x) dx,$$

$$G_n(x) = \phi_n(x) - \sum_{k=0}^{n-1} c_{nk} g_k(x) = [\rho(x)]^{1/2} x^n - \sum_{k=0}^{n-1} [\rho(x)]^{1/2} p_k(x) = [\rho(x)]^{1/2}\left(x^n - \sum_{k=0}^{n-1} p_k(x)\right)$$

$$d_n = \| G_n \|^2 = \int_a^b [G_n(x)]^2 dx,$$

$$g_n(x) = \frac{G_n(x)}{d_n^{1/2}} = [\rho(x)]^{1/2}\left(\frac{1}{\sqrt{d_n}}x^n - \frac{1}{\sqrt{d_n}}\sum_{k=0}^{n-1} p_k(x)\right).$$

Prema tome matematičkom indukcijom sad nije teško pokazati Teoremu 3.01.

(3.01) Teorem

Neka je dat skup funkcija

$$\left\{[\rho(x)]^{1/2}, [\rho(x)]^{1/2} x, [\rho(x)]^{1/2} x^2, ..., [\rho(x)]^{1/2} x^n, ...\right\}$$

i neka je $\rho(x)$ ne-negativna funkcija takva da integral proizvoda proizvoljnog polinoma sa $\rho(x)$ nad intervalom (a,b) uvijek postoji. Tada Gram-Schmidtovim postupkom iz datog skupa funkcija možemo konstruisati ortonormiran sistem

$$\left\{[\rho(x)]^{1/2} p_0(x), [\rho(x)]^{1/2} p_1(x), [\rho(x)]^{1/2} p_2(x), ..., [\rho(x)]^{1/2} p_n(x), ...\right\}$$

gdje su $p_k(x),\ k = 0,1,2,...,n,...,$ polinomi stepena k. ◊

Polinomi $p_n(x)$ su normirani ortogonalni ili ortonormirani polinomi sa $\rho(x)$ kao težinskom funkcijom. Oni zadovoljavaju uslove

$$\int_a^b \rho(x) p_m(x) p_n(x) dx = 0 \quad, m \neq n,$$

$$\int_a^b \rho(x) [p_n(x)]^2 dx = 1.$$

Svaki od polinoma je stepena prikazan kao njegov subskript, i koeficijent uz član x^n je pozitivan. Ove osobine potpuno određuju sistem polinoma $p_n(x)$.

Pokažimo da je proizvoljan ortogonalan sistem funkcija $\{f_1(x), f_2(x), ..., f_n(x)\}$ linearno nezavisan. Pretpostavimo da je suma $\sum_{k=1}^{n} \alpha_k f_k(x) = 0$ za neke $\alpha_1, ..., \alpha_k$. Tada

$$0=\sum_{k=1}^{n}\int_a^b 0\cdot\alpha_k f_k(x)dx=\sum_{k=1}^{n}\int_a^b\left(\sum_{i=1}^{n}\alpha_i f_i(x)\right)\alpha_k f_k(x)dx=\sum_{k=1}^{n}|\alpha_k|^2\int_a^b [f_k(x)]^2 dx.$$

Ovo povlači da je $\alpha_k=0$ za svaki $k=1,2,...,n.$ prema tome $\{f_1(x),f_2(x),...,f_n(x)\}$ je linearno nezavisan skup. Time je dokazana Teroema 3.02.

(3.02) Teorem

Ortogonalni sistemi su linearno nezavisni. ◊

Prema tome možemo zaključiti da je sistem

$$\left\{[\rho(x)]^{1/2}p_0(x),[\rho(x)]^{1/2}p_1(x),[\rho(x)]^{1/2}p_2(x),\ldots[\rho(x)]^{1/2}p_n(x)\right\}$$

linearno nezavisan, pa je i skup polinoma

$$\{p_0(x),p_1(x),p_2(x),\ldots p_n(x)\}$$

linearno nezavisan. Ili drugim riječima, svaki polinom n-tog stepena se može izraziti kao linearna kombinacija od $p_0(x),\ ...,\ p_n(x).$ Svaki $p_n(x)$ je ortogonalan na svaki polinom nižeg stepena u odnosu na težinsku funkciju $\rho(x),$ tj. ako je $q(x)$ bilo koji takav polinom,

$$\int_a^b\rho(x)p_n(x)q(x)dx=0$$

Ove činjenice su direktne posljedice opštih rezultata dobijenih u Lemama 2.03 i 2.04. U tekstu iznad smo pokazali sljedeće dvije tvrdnje:

(3.03) Propozicija

Neka su $p_k(x),\ k=0,1,...,n,$ *polinomi iz Teoreme 3.01. Tada se svaki polinom* n*-tog stepena može napisati kao linearna kombinacija od* $p_0(x),\ ...,\ p_n(x).$ ◊

(3.04) Posljedica

Neka su $p_k(x),\ k=0,1,...,n,$ *polinomi iz Teoreme 3.01. Tada je svaki* $p_k(x)$ *ortogonalan na proizvoljan polinom nižeg stepena, u odnosu na težinsku funkciju* $\rho(x).$ ◊

4. Razvijanje proizvoljne funkcije u red

Polinomi $p_n(x)$ iz Teoreme 3.01 se mogu koristiti za formalno razlaganje proizvoljne funkcije u red. Formule su komplikovanije zbog prisustva težinske funkcije, ali su u drugu ruku, jednostavnije zbog činjenice da su p-ovi normalizovani. Želimo znati kada se proizvoljna funkcija $f(x)$ može napisati u obliku reda

$$f(x)=c_0p_0(x)+c_1p_1(x)+\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}c_np_n(x)$$

tj. kada se funkcija $f(x)$ može razviti u red po ortogonalnim polinomima $p_n(x).$ Pretpostavimo da se $f(x)$ može razviti u ovakav red i da su sljedeće operacije opravdane. Množenjem sa $\rho(x)p_k(x)$ i integriranjem u granicama od a do b dobijemo

$$\int_a^b\rho(x)f(x)p_k(x)dx=\sum_{n=0}^{\infty}c_n\int_a^b\rho(x)p_k(x)p_n(x)dx$$

Zbog ortonormiranih osobina polinoma $p_k(x)$, svi integrali na desnoj strani jednaki su nuli, osim kada je $k = n$, i u tom slučaju $\int_a^b \rho(x) p_k(x) p_k(x) dx = 1$ Prema tome

$$c_k = \int_a^b \rho(x) f(x) p_k(x) dx.$$

Koeficijenti $c_n(x)$ se nazivaju _Furijerovi koeficijeni_ koeficijenti funkcije $f(x)$ u odnosu na ortonorirane polinome $p_n(x)$ sa težinskom funkcijom $\rho(x)$. Red $\sum_{n=0}^{\infty} c_n p_n(x)$, gdje su c_n Furijeovi koeficijenti funkcije $f(x)$ naziva se _Furijeov red_ funkcije $f(x)$. Furijeovi koeficijenti postoje za svaku funkciju $f(x)$ koja je kvadratno sumabilna na (a,b) sa težinskom funkcijom $\rho(x)$. Na osnovu nejednakosi Cauchy-Bunjakovskog

$$\left| \int_a^b f_1(x) f_2(x) dx \right| \le \left(\int_a^b [f_1(x)]^2 dx \right)^{1/2} \left(\int_a^b [f_2(x)]^2 dx \right)^{1/2}$$

integral $\int_a^b \rho(x) f(x) p_k(x) dx$ konvergira za ovakve funkcije. Dalke, za svaku ovakvu funkciju $f(x)$ možemo napisati njen Fourierov red, ali bez daljeg ispitivanja ne znamo da li je red konvergira i ako konvergira da li mu je suma $f(x)$.

Ako je $\sum_{n=0}^{\infty} c_n p_n(x)$ Furierov red funkcije $f(x)$ (tj. ako su $c_n = \int_a^b \rho(x) f(x) p_n(x) dx$) onda pišemo

$$f(x) \sim \sum_{n=0}^{\infty} c_n p_n(x).$$

Prethodni tekst možemo sumirati sljedećom teoremom:

(4.01) Teorema (Furierovo razlaganje u odnosu na ortogonalne polinome)

Neka je

$$\left\{ [\rho(x)]^{1/2} p_0(x), [\rho(x)]^{1/2} p_1(x), [\rho(x)]^{1/2} p_2(x), \ldots, [\rho(x)]^{1/2} p_n(x), \ldots \right\}$$

ortonormirani sistem iz Teoreme 3.01. Tada se svaka kvadratno sumabilna funkcija $f(x)$ *na* (a,b) *može napisati u obliku*

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n p_n(x).$$

Ovo zovemo Furijerovo razlaganje funkcije $f(x)$ *na intervalu* (a,b) *u odnosu na ortogonalne polinome i pišemo*

$$f(x) \sim \sum_{n=0}^{\infty} c_n p_n(x).$$

Skalare

$$c_n = \int_a^b \rho(x) f(x) p_n(x) dx,$$

zovemo Furierovi koeficijenti funkcije $f(x)$ *u odnosu na ortogonalne polinome* $p_n(x)$ *sa težinskom funkcijom* $\rho(x)$. ◊

Neka $s_n(x)$ označavaju parcijalnu sumu reda $\sum_{k=0}^{\infty} c_k p_k(x)$ sve do člana n-tog stepena:

$$s_n(x) = c_0 p_0(x) + c_1 p_1(x) + \ldots + c_n p_n(x).$$

Ako umjesto x uzmemo varijablu t u formuli za Furijerove koeficijenet $c_k = \int_a^b \rho(t) f(t) p_k(t) dx$, i dobijeni izraz zamjenimo umjesto c-ova u prethodnu jednakost, dobićemo

$$s_n(x) = p_0(x)\int_a^b \rho(t) f(t) p_0(t) dx + \int_a^b p_1(x)\rho(t) f(t) p_1(t) dx + \ldots + p_n(x)\int_a^b \rho(t) f(t) p_n(t) dx,$$

$$s_n(x) = \int_a^b \rho(t) f(t)\left[p_0(x)p_0(t) + p_1(x)p_1(t) + \ldots + p_n(x)p_n(t)\right] d x$$

$$s_n(x) = \int_a^b \rho(t) f(t) K_n(x,t) dt,$$

gdje je

$$K_n(x,t) = K_n(t,x) = \sum_{k=0}^{n} p_k(t) p_k(x).$$

U stvari, ako je $f(x)$ polinom n-tog ili nižeg stepena, $f(x) = \pi_n(x)$, iz prethodnog dijela je poznato da postoji reprezentacija oblika $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n p_n(x)$ gdje je desna strana konačna suma umjesto beskonačnog reda. Procedura za određivanje koeficijenata tada se primjenjuje ez pitanja konvergencije, i koeficijenti su dati sa $c_k = \int_a^b \rho(x) f(x) p_k(x) dx$. U ovom slučaju $s_n(x)$ je isti kao $\pi_n(x)$, i $\pi_n(x)$ je identički proizveden pomoću formule

$$\pi_n(x) = \int_a^b \rho(t)\pi_n(t) K_n(x,t) dt.$$

Na primjer, posmatrajmo ortonormirane Lagendreove polinome koje smo dobili u Vježbi 2.02

$$P_0(x) = \frac{1}{\sqrt{2}},$$

$$P_1(x) = \sqrt{\frac{3}{2}}x,$$

$$P_2(x) = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{5}{2}}(3x^2 - 1)$$

$$P_3(x) = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{7}{2}}\left(5x^3 - 3x\right).$$

Ako razvijamo polinom $p(x) = x^3 - 1$ preko P_0, P_1, P_2 i P_3 imamo

$$c_0 = \int_{-1}^{1}(x^3 - 1)P_0(x) dx = -\sqrt{2},$$

$$c_1 = \int_{-1}^{1}(x^3 - 1)P_1(x) dx = \frac{\sqrt{6}}{5},$$

$$c_2 = \int_{-1}^{1}(x^3 - 1)P_2(x) dx = 0,$$

$$c_3 = \int_{-1}^{1}(x^3 - 1)P_2(x) dx = \frac{2\sqrt{14}}{35}.$$

Prema tome

$$x^3 - 1 = -\sqrt{2}P_0(x) + \frac{\sqrt{6}}{5}P_1(x) + 0P_2(x) + \frac{2\sqrt{14}}{35}P_3(x).$$

Time smo riješili Zadatak 4.02.

(4.02) Zadatak

Plinom $p(x) = x^3 - 1$ *napisati kao linearnu kombinacju Lagendreoveovih ortonormiranih polinoma* $P_0(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $P_1(x) = \sqrt{\frac{3}{2}}x$, $P_2(x) = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{5}{2}}(3x^2 - 1)$ *i* $P_3(x) = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{7}{2}}\left(5x^3 - 3x\right)$. ◊

Literatura

(navedena po abecednm redu)

[1] T. M. Apostol: *"Mathematical Analysis"*, second edition, China Machine Press, 2004., strana 104-121

[2] L. Debnath, P. Mikusinski: *"Hilbert Spaces with Applications"*, Elsevier Academic Press, 2005., strana 98-143

[3] D. Jackson: *"Fourier series and orthogonal polynomials"*, Third Impression, The Mathematical Association of America, 1948., strana 149-184

[4] P. Junghanns: *"Lecture Notes from Orthogonal Polynomials"*, Summer Term 2012, skinuto sa web stranice www-user.tu-chemnitz.de/~peju/skripte/orthopol/OrthPoly_Engl.pdf, strana 15-27

[5] S. Kalabušić, M. Malenica: *"Specijalne funkcije (Teorija i zadaci)"*, Prirodno-matematički fakultet, Univerzitet u Sarajevu, 2010., strana 309-349